Schrodinger 5 (1) (2024)

Schrodinger

Jurnal Ilmiah Mahasiswa Pendidikan Fisika

Solusi Persamaan Klein Gordon dengan Kombinasi Potensial Hiperbolik dalam 3D Koordinat Silinder

Isnaini Lilis Elviyanti[1*], Ahmad Aftah Syukron[2]

[1] Teknik Sipil, Universitas Ma'arif Nahdlatul Ulama Kebumen

[2] Teknik Informatika, Universitas Ma'arif Nahdlatul Ulama Kebumen

* E-mail: isna.elviyanti@umnu.ac.id

Abstract

This research focuses on the relativistic energy and wave function for spin-zero particles using the Klein-Gordon Equation influenced by a combination of hyperbolic potentials, specifically the Hultén potential and the hyperbolic Scarf potentials type I and II. The main problem addressed is how to solve the Klein-Gordon Equation under anti-particle conditions, where the scalar potential is equal to the negative vector potential, and in separable non-central cylindrical coordinates. The objective of this research is to determine the relativistic energy and wave function of spin-zero particles under the mentioned conditions. To achieve this objective, the asymptotic iteration method (AIM) is used to solve the Klein-Gordon Equation, which has been reduced to three one-dimensional Schrödinger equations. This approach allows for the separation of variables in cylindrical coordinates, breaking the three-dimensional non-central cylindrical potential into radial (r), angular (θ), and axial (z) components. The results of the research indicate that the relativistic energy and wave function can be obtained using the AIM. The relativistic energy is derived from the radial component, and the wave function is presented in the form of a hypergeometric equation. These results are presented as equations that show the relationship between energy and wave function with the involved variables.

Keywords: *Klein-Gordon equation, Cylindrical coordinates, Hulthen potential, Type I and II hyperbolic Scarf potentials*

Abstrak

Penelitian ini berfokus pada energi relativistik dan fungsi gelombang untuk partikel spin nol menggunakan Persamaan Klein-Gordon yang dipengaruhi oleh kombinasi potensial hiperbolik, yaitu potensial Hulten serta potensial Scarf hiperbolik tipe I dan II. Permasalahan utama yang dihadapi adalah bagaimana memecahkan Persamaan Klein-Gordon dalam kondisi anti-partikel, di mana potensial skalar sama dengan negatif potensial vektor, serta dalam koordinat silinder tak terpusat yang dapat dipisahkan. Tujuan penelitian ini adalah untuk menentukan energi relativistik dan fungsi gelombang dari partikel spin nol dalam kondisi yang telah disebutkan. Untuk mencapai tujuan ini, metode iterasi asimtotik (AIM) digunakan dalam menyelesaikan Persamaan Klein-Gordon yang telah direduksi menjadi tiga persamaan Schrödinger satu dimensi. Pendekatan ini memungkinkan pemisahan variabel dalam koordinat silinder, memecah potensial silinder non-pusat tiga dimensi menjadi bagian radial (r), bagian sudut (θ), dan bagian aksial (z). Hasil penelitian menunjukkan bahwa energi relativistik dan fungsi gelombang dapat diperoleh melalui metode AIM. Energi relativistik dihasilkan dari bagian radial dan fungsi gelombang disajikan dalam bentuk persamaan hipergeometrik. Hasil-hasil ini dipaparkan dalam bentuk persamaan yang menunjukkan keterkaitan antara energi dan fungsi gelombang dengan variabel-variabel yang terlibat.

Kata kunci: Persamaan Klein Gordon, koordinat silinder, potensial Hulten, potensial scraff hiperbolik tipe I dan II.

How to Cite: Elviyanti, I.L. & Syukron, A.A. (2024). Solusi Persamaan Klein Gordon dengan Kombinasi Potensial Hiperbolik dalam 3D Koordinat Silinder. *Schrodinger Jurnal Ilmiah Mahasiswa Pendidikan Fisika,* 5(1), 72-81.

PENDAHULUAN

Persamaan Klein Gordon digunakan untuk menggambarkan karakteristik partikel mikroskopis spin-nol di banyak bidang fisika, khususnya mekanika kuantum relativistik (Momtazi et al., 2014). Persamaan Klein Gordon untuk berbagai potensial telah diselesaikan dengan menggunakan metode yang berbeda seperti potensial Trigonometri (Cari et al., 2017), Potensial Poschl-Teller (Nugraha et al., 2017) serta potensial *shape invariant* (Suparmi et al., 2018), potensil Hulten (Elviyanti et al., 2018) menggunakan Metode Iterasi Asimtotik (AIM). Selain itu, persamaan Klein Gordon dapat diselesaikan dengan menggunakan Nikiforov Uvarof untuk Potensial Hulten (Ikot et al., 2011) dan potensial *cotangent* hiperbolik (Elviyanti & Syukron, 2020). Metode metode dalam mekanika kuantum non-relativistik yang lain untuk menyelesaikan persamaan Klein Gordon yaitu menggunakan metode hipergeometri dengan potensial osilator harmonic (Cari et al., 2019; Poszwa, 2014).

Dalam penelitian ini, persamaan Klein Gordon untuk potensial silinder non-pusat yang dapat dipisahkan dalam kasus anti partikel $\left(S(x)=-V(x)\right)$ (Ikhdair, 2011) direduksi menjadi tiga persamaan mirip Schrodinger satu dimensi dengan bentuk variasi potensial. Pada kondisi tersebut, persamaan Klein-Gordon dapat direduksi menjadi persamaan Schordinger-*like equation* sehingga dapat diselesaikan menggunakan metode dalam mekanika kuantum non-relativistik (Suparmi, 2011; Suparmi et al., 2019). Penyelesaian ini dapat menghasilkan energi dan fungsi gelombang. Potensial silinder non-pusat tiga dimensi yang dapat dipisahkan tiga dimensi yang dapat dipisahkan (Suparmi et al., 2018) terdiri dari potensial bagian radial (*r*) yang menggunakan potensial Hulten (Biswas & Debnath, 2013; Elviyanti et al., 2018), potensial bagian sudut (θ) menggunakan potensial Hyperbolic Scarf tipe I (Suparmi et al., 2018) dan bagian aksial (z) menggunakan potensial Hyperbolic Scarf tipe II (Suparmi, 2013). Setiap bagian potensial adalah potensial bentuk hiperbolik.

Potensial Hulten digunakan untuk bidang fisika nuklir, fisika partikel dan fisika atom, fisika zat padat dan fisika-kimia (Roy, 2005). Fungsi gelombang dari potensial hulthen telah digunakan dalam masalah fisika zat padat. Selain itu, fungsi gelombang potensial Hulthen like digunakan untuk meninvestigasi masalah atom (Varshni, 1990). Potensial hiperbolic scraff tipe I telah digunakan untuk mempelajari dinamika quark-gluon (Pratiwi et al., 2016). Scraf hiperbolik tipe II telah digunakan untuk mempelajari elektrodinamika dan Model kristal dalam keadaan padat (Negro et al., 2004). Persamaan Klein Gordon dengan potensial bentuk invarian adalah direduksi menjadi persamaan diferensial hipergeometrik umum yang dapat diselesaikan dengan metode iterasi asimptotik (AIM).

Persamaan Klein Gordon dengan kombinasi potensial hiperbolik dalam 3D koordinat silinder

Persamaan Klein-Gordon merupakan hasil reduksi dari persamaan Schordinger yang dikembangkan sesuai dengan teori relativitas khusus yang digunakan untuk partikel berspin nol (Poszwa, 2014). Berikut merupakan Persamaan Klein Gordon:

$$\left(E-V(\hat{r})\right)^2\psi(r)=\left[P^2c^2+\left(M_oc^2+S(\hat{r})\right)^2\right] \tag{1}$$

Dimana *E* dan *M* adalah energi relativitas dan massa. Potensial vektor $\left(V(x)\right)$ berhubungan dengan energi gerak partikel dan $S(x)$ adalah potensial skalar yang berhubungan dengan energi diam partikel. Persamaan Klein-Gordon memiliki dua kondisi yaitu kondisi potensial skalar sama dengan potensial vektor $\left(S(x)=V(x)\right)$ yang digunakan untuk partikel dan potensial skalar sama dengan negatif potensial vektor $\left(S(x)=-V(x)\right)$ untuk antipartikel (Ikhdair, 2011). Pada kondisi tersebut, persamaan Klein-Gordon dapat direduksi menjadi persamaan Schordinger-*like equation* sehingga persamaan Klein-Gordon dapat diselesaikan menggunakan metode dalam mekanika kuantum non-relativistik.

Kemudian, persamaan Klein Gordon di aplikasikan pada koordinat silinder sebagai berikut: $$\Delta=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{2}$$

Dengan $0\le r\le\infty, 0\le\theta\le 2\pi, 0\le z\le\infty$. Kombinasi potensial hiperbolik disajikan sebagai berikut:

$$\left(\frac{V_H}{2}\left(1-\coth\alpha r\right)\right)+\frac{1}{r^2}\left(\frac{b^2-a(a+1)}{\cosh^2\alpha\theta}-\frac{2b\left(a+\frac{1}{2}\right)\sinh\alpha\theta}{\cosh^2\alpha\theta}\right)+\left(\frac{b^2+a(a-1)}{\sinh^2\alpha z}-\frac{2b\left(a-\frac{1}{2}\right)\cosh\alpha z}{\sinh^2\alpha z}\right) \tag{3}$$

Dimana, V_H, α, *a*, dan *b* adalah konstanta positif.

Kemudian mengaplikasikan $\left(S(x)=-V(x)\right)$ pada persamaan Klein Gordon, koordinat silinder dan kombinasi potensial hiperbolik, maka diperoleh:

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)\\ +\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\end{pmatrix}\psi(r,\theta,z)+\left[\left(E^2-M_o^2\right)-\left(E-M_o\right)\begin{pmatrix}\left(\frac{V_H}{2}\left(1-\coth\alpha r\right)\right)\\ +\frac{1}{r^2}\left(\frac{b^2-a(a+1)}{\cosh^2\alpha\theta}-\frac{2b\left(a+\frac{1}{2}\right)\sinh\alpha\theta}{\cosh^2\alpha\theta}\right)\\ +\left(\frac{b^2+a(a-1)}{\sinh^2\alpha z}-\frac{2b\left(a-\frac{1}{2}\right)\cosh\alpha z}{\sinh^2\alpha z}\right)\end{pmatrix}\right]\psi(r,\theta,z)=0 \tag{4}$$

METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode *Asymtotic Iteration Method* (AIM). Metode AIM adalah teknik matematis yang digunakan untuk menemukan solusi eksak dari persamaan diferensial orde dua linear. Metode ini melibatkan penggunaan hubungan rekursif untuk mencapai solusi dengan iterasi yang konvergen. AIM sangat berguna dalam berbagai bidang ilmu, terutama dalam fisika teoritis, untuk menyelesaikan persamaan yang muncul dalam konteks mekanika kuantum dan teori relativitas. Metode AIM dapat ditulis dalam bentuk (Ciftci et al., 2003; Falaye, 2012)

$$k_m''(l)=\lambda_0(l)k_m'(l)+s_0(l)k_m(l) \tag{5}$$

dimana $\lambda_0(l)$ dan $s_0(l)$ adalah koefisien dari persamaan diferensial yang terdefinisi dalam suatu interval dan kontinu pada rentang nilai *l*. Parameter *m* menunjukkan indeks ke-*m*. Variabel $s_0(l)$ dan $\lambda_0(l)$ bersifat dapat didiferensialkan. Dengan mendiferensialkan Persamaan (5) terhadap l maka diperoleh,

$$k_m'''(l)=\lambda_1(l)k_m''(l)+s_1(l)k_m(l) \tag{6}$$

dimana

$$\lambda_1(l) = \lambda_0^{'}(l) + s_0(l) + \lambda_0^{2}(l) \tag{7}$$

$$s_1(l) = s_0^{'}(l) + s_0(l)\lambda_0(l) \tag{8}$$

kemudian diferensial ke $(j+1)$ dan $(j+2)$ dengan $j = 1, 2, 3\ldots$, sehingga diperoleh,

$$k_m^{\,j+1}(l) = \lambda_{j-1}(l)k_m^{'}(l) + s_{j-1}(l)k_m(l) \tag{9}$$

$$k_m^{\,j+2}(l) = \lambda_j(l)k_m^{'}(l) + s_j(l)k_m(l) \tag{10}$$

dimana

$$\lambda_j(l) = \lambda^{'}_{j-1}(l) + s_{j-1}(l) + \lambda_0(l)\lambda_{j-1}(l) \tag{11}$$

$$s_j(x) = s^{'}_{j-1}(x) + s_0(x)\lambda_{j-1}(x) \tag{12}$$

ini disebut dengan hubungan berulang (*recurrence relation*). Dari rasio perbandingan ke-$(j+1)$ dan ke-$(j+2)$, dipeoleh,

$$\frac{d}{dl}\ln\left[k_m^{j+1}(l)\right] = \frac{k_m^{j+2}(l)}{k_m^{j+1}(l)} = \frac{\lambda_j(l)\left[k_m^{'}(l) + \dfrac{s_j(l)}{\lambda_j(l)}k_m(l)\right]}{\lambda_{j-1}(l)\left[k_m^{'}(l) + \dfrac{s_{j-1}(l)}{\lambda_{j-1}(l)}k_m(l)\right]} \tag{13}$$

Untuk nilai iterasi *j* yang cukup besar,

$$\frac{s_j(l)}{\lambda_j(l)} = \frac{s_{j-1}(l)}{\lambda_{j-1}(l)} = \eta(l) \tag{14}$$

dimana $\eta(l)$ adalah aspek metode asimtotik.

$$y_m^{k+1}(x) = C_1\lambda_{k-1}(x)\exp\left(\int^x\left[\eta(x_1) + \lambda_0(x_1)\right]dx_1\right) \tag{15}$$

dimana C_1 adalah konstanta yang muncul dari hasil integral. Maka harga nilai eigen dapat diperoleh dari operasi akar sesuai kondisi berikut

$$\Delta_j(l) = \lambda_j(l)s_{j-1}(l) - \lambda_{j-1}(l)s_j(l) \tag{16}$$

Pada umumnya solusi eigennilai dari Persamaan(11) dan (12) diberikan dalam Persamaan (13). Sementara untuk solusi fungsi eigen ditunjukkan oleh,

$$k_m^{''}(l) = 2\left(\frac{al^{N+1}}{1-bl^{N+2}} - \frac{t+1}{l}\right)k_m^{'}(l) - \frac{wl^N}{1-bl^{N+2}}k_m(l) \tag{17}$$

Kemudian Persamaan (17) dibandingkan dengan persamaan tipe AIM pada Persamaan (5) untuk memperoleh konstanta-konstanta dari Persamaan

$$(\sigma)_m = \frac{\Gamma(\sigma+m)}{\Gamma(\sigma)}; \quad \sigma = \frac{2t+N+3}{N+2}; \quad \rho = \frac{(2t+1)b+2a}{(N+2)b} \tag{18}$$

Persamaan (19) digunakan untuk menentukan fungsi eigen yang ditunjukkan oleh,

$$k_m(l) = (-1)^m C_2(N+2)^m(\sigma)_m\ {}_2F_1\left(-m, \rho+m; \sigma; bl^{N+2}\right) \tag{19}$$

dimana C_2 adalah konstanta normalisasi dan ${}_2F_1$ adalah fungsi hipergeometri (Ciftci et al., 2003; Falaye, 2012).

HASIL DAN PEMBAHASAN

Penelitian ini memanfaatkan metode pemisahan variabel untuk menyelesaikan persamaan Klein-Gordon yang dipengaruhi oleh kombinasi potensial hiperbolik. Persamaan (4) diselesaikan dengan metode pemisahan variabel dengan membuat fungsi gelombang menjadi

$$\psi(r,\theta,z)=R(r)P(\theta)Z(z) \tag{20}$$

Pemisahan variabel dari fungsi gelombang pada persamaan (20) yang dilakukan, maka diperolehlah 3 bagian yaitu axial (z), angular (θ), dan radial (r), yang dapat ditulis sebagai berikut

$$\left(\frac{1}{Z(z)}\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2}\right)-(E-M_o)\left(\frac{b^2+a(a-1)}{\sinh^2\alpha z}-\frac{2b\left(a-\frac{1}{2}\right)\cosh\alpha z}{\sinh^2\alpha z}\right)=\lambda_1 \tag{21}$$

$$\left(\frac{1}{P(\theta)}\frac{\partial^2 P(\theta)}{\partial\theta^2}\right)-\left[(E-M_o)\left(\frac{b^2-a(a+1)}{\cosh^2\alpha\theta}-\frac{2b\left(a+\frac{1}{2}\right)\sinh\alpha\theta}{\cosh^2\alpha\theta}\right)\right]=\lambda_2 \tag{22}$$

$$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right)\right)-\left[(E-M_o)\left(\frac{V_H}{2}(1-\coth\alpha r)\right)-\left(E^2-M_o{}^2\right)-\lambda_1-\frac{\lambda_2}{r^2}\right]R(r)=0 \tag{23}$$

Dimana λ_1 dan λ_2 adalah konstanta pemisahan variabel. Dengan pemisahan ini, persamaan diferensial Klein-Gordon dapat dipecahkan secara terpisah untuk setiap komponen. Kemudian Persamaan (21) sampai (23) diselesaikan masing-masing dengan AIM.

Solusi Persamaan Klein Gordon Bagian Axial (z)

Memisalkan $\cosh\alpha z=(1-2u_z)$ dari Persamaan (21), maka Persamaan (21) menjadi.

$$u_z(1-u_z)\frac{d^2Z(z)}{du_z{}^2}+\left(\frac{1}{2}-u_z\right)\frac{dZ(z)}{du_z}+\left[\eta_{EM_o}\left(\frac{b^2+a(a-1)}{4u_z(1-u_z)}-\frac{2b\left(a-\frac{1}{2}\right)(1-2u)}{4u_z(1-u_z)}\right)+\lambda_z\right]Z(z)=0 \tag{24}$$

Dimana, $\eta_{EM_o}=\dfrac{(E-M_o)}{\alpha^2}$; $\lambda_z=\dfrac{\lambda_1}{\alpha^2}$. kemudian, dengan menggunakan fungsi gelombang baru $Z=u_z{}^{\gamma_z}(1-u_z)^{\chi_z}\ f(u_z)$, Persamaan (24) menjadi,

$$f''(u_z)+\left[\frac{\left(2\gamma_z+\frac{1}{2}\right)-(2\gamma_z+2u_z\chi_z+1)u_z}{u_z(1-u_z)}\right]f'(u_z)+\left[\frac{\lambda_z-(\gamma_z+\chi_z)^2}{u_z(1-u_z)}\right]f(u_z)=0 \tag{25}$$

Dengan

$$\gamma_z=\frac{\frac{1}{2}\pm\sqrt{-\eta_{EM_o}\left[\left(b-\left(a-\frac{1}{2}\right)\right)^2+\frac{1}{4}\right]+\frac{1}{4}}}{2} \tag{26}$$

$$\chi_z=\frac{\frac{1}{2}\pm\sqrt{-\eta_{EM_o}\left[\left(b+\left(a-\frac{1}{2}\right)\right)^2+\frac{1}{4}\right]+\frac{1}{4}}}{2} \tag{27}$$

Dengan membandingkan persamaan (5) dan (25) maka dihasilkan,

$$\lambda_0 = \frac{-\left(2\gamma_z + \frac{1}{2}\right)}{u_z} + \frac{\left(2\chi_z + \frac{1}{2}\right)}{1-u_z} \tag{28}$$

$$s_o = \frac{\left(\gamma_z + \chi_z\right)^2 - \lambda_z}{u_z} + \frac{\left(\gamma_z + \chi_z\right)^2 - \lambda_z}{\left(1-u_z\right)} \tag{29}$$

Dengan menggunakan Persamaan (6), (16), dan (25), maka diperoleh eigenvalue,

$$\lambda_z = \left(\gamma_z + \chi_z + n_z\right)^2 \tag{30}$$

$$\lambda_1 = \alpha^2 \left[\left(\frac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{-\eta_{EM_o}\left[\left(b-\left(a-\frac{1}{2}\right)\right)^2 + \frac{1}{4}\right] + \frac{1}{4}}}{2} \right) + \left(\frac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{-\eta_{EM_o}\left[\left(b+\left(a-\frac{1}{2}\right)\right)^2 + \frac{1}{4}\right] + \frac{1}{4}}}{2} \right) + n_z \right]^2 \tag{31}$$

n_z adalah bilangan kuantum axial. Untuk fungsi gelombang bagian axial dihasilkan dari Persamaan (16), (17), (18), dan (19) serta $\cosh \alpha z = \left(1-2u_z\right)$ dan $Z\left(u_z\right) = u_z^{\gamma_z}\left(1-u_z\right)^{\chi_z} f\left(u_z\right)$, sehingga diperoleh fungsi gelombang, maka

$$Z_0\left(u_z\right) = C'\left(\frac{1-\cosh \alpha z}{2}\right)^{\gamma_z}\left(\frac{1+\cosh \alpha z}{2}\right)^{\chi_z} \tag{32}$$

$$Z_1\left(u_z\right) = -C'\left(\frac{1-\cosh \alpha z}{2}\right)^{\gamma_z}\left(\frac{1+\cosh \alpha z}{2}\right)^{\chi_z} \times \left(2\gamma_z+1\right)\left\{1 + \frac{(-1)\left(2\gamma_z + 2\chi_z + 2\right)\left(\frac{\cosh \alpha z - 1}{2}\right)}{\left(2\gamma_z+1\right)}\right\} \tag{33}$$

Persamaan (32) dan (33) merupakan fungsi gelombang untuk $n_z=0$ dan $n_z=1$ dari persamaan Klein Gordon kombinasi potensial hiperbolik bagian aksial (*z*).

Solusi Persamaan Klein Gordon Bagian Angular (θ)

Memisalkan $\sinh \alpha\theta = i\left(1-2u_\theta\right)$ dari Persamaan (22), maka Persamaan (22) menjadi.

$$u_\theta\left(1-u_\theta\right)\frac{d^2P(\theta)}{du_\theta^{\,2}} + \left(\frac{1}{2}-u_\theta\right)\frac{dP(\theta)}{du_\theta} + \left[\eta_{EM_o}\left(\frac{b^2 - a(a+1)}{4u_\theta\left(1-u_\theta\right)} - \frac{2b\left(a+\frac{1}{2}\right)i\left(1-2u_\theta\right)}{4u_\theta\left(1-u_\theta\right)}\right) + \lambda_\theta\right]P(\theta) = 0 \tag{34}$$

Dimana $\eta_{EM_o} = \frac{\left(E-M_o\right)}{\alpha^2}$; $\lambda_\theta = \frac{\lambda_2}{\alpha^2}$. Kemudian, dengan menggunakan fungsi gelombang baru $P(\theta) = u_\theta^{\gamma_\theta}\left(1-u_\theta\right)^{\chi_\theta} f\left(u_\theta\right)$, Persamaan (34) menjadi,

$$f''\left(u_\theta\right) + \left[\frac{\left(2\gamma_\theta + \frac{1}{2}\right) - \left(2\gamma_\theta + 2u_\theta\chi_\theta + 1\right)u_\theta}{u_\theta\left(1-u_\theta\right)}\right] f'\left(u_\theta\right) + \left[\frac{\lambda_\theta - \left(\gamma_\theta + \chi_\theta\right)^2}{u_\theta\left(1-u_\theta\right)}\right] f\left(u_\theta\right) = 0 \tag{35}$$

Dengan

$$\gamma_\theta = \frac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{-\eta_{EM_o}\left[\left(b - i\left(a+\frac{1}{2}\right)\right)^2 + \frac{1}{4}\right] + \frac{1}{4}}}{2} \tag{36}$$

$$\chi_\theta = \frac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{-\eta_{EM_o}\left[\left(b + i\left(a+\frac{1}{2}\right)\right)^2 + \frac{1}{4}\right] + \frac{1}{4}}}{2} \tag{37}$$

Dengan membandingkan persamaan (5) dan (35) maka dihasilkan,

$$\lambda_0 = \frac{-\left(2\gamma_\theta + \frac{1}{2}\right)}{u_\theta} + \frac{\left(2\chi_\theta + \frac{1}{2}\right)}{1-u_\theta} \tag{38}$$

$$s_o = \frac{\left(\gamma_\theta + \chi_\theta\right)^2 - \lambda_\theta}{u_\theta} + \frac{\left(\gamma_\theta + \chi_\theta\right)^2 - \lambda_\theta}{\left(1-u_\theta\right)} \tag{39}$$

Dengan menggunakan Persamaan (6), (16), dan (35), maka diperoleh eigenvalue,

$$\lambda_\theta = \left(\gamma_\theta + \chi_\theta + n_\theta\right)^2 \tag{40}$$

$$\lambda_2 = \alpha^2 \left[\left(\frac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{-\eta_{EM_o}\left[\left(b - i\left(a+\frac{1}{2}\right)\right)^2 + \frac{1}{4}\right] + \frac{1}{4}}}{2}\right) + \left(\frac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{-\eta_{EM_o}\left[\left(b + i\left(a+\frac{1}{2}\right)\right)^2 + \frac{1}{4}\right] + \frac{1}{4}}}{2}\right) + n_\theta\right]^2 \tag{41}$$

n_θ adalah bilangan kuantum angular. Untuk fungsi gelombang bagian angular dihasilkan dari Persamaan (16), (17), (18), dan (19) serta $\sinh\alpha\theta = i\left(1-2u_\theta\right)$ dan baru $P(\theta) = u_\theta^{\gamma_\theta}\left(1-u_\theta\right)^{\chi_\theta} f\left(u_\theta\right)$, sehingga diperoleh fungsi gelombang,

$$P_0\left(u_\theta\right) = C'\left(\frac{1-i\sinh\alpha\theta}{2}\right)^{\gamma_\theta}\left(\frac{1+i\sinh\alpha\theta}{2}\right)^{\chi_\theta} \tag{42}$$

$$P_1\left(u_\theta\right) = C'\left(\frac{1-i\sinh\alpha\theta}{2}\right)^{\gamma_\theta}\left(\frac{1+i\sinh\alpha\theta}{2}\right)^{\chi_\theta} \times \left(2\gamma_\theta + 1\right)\left\{1 + \frac{(-1)\left(2\gamma_\theta + 2\chi_\theta + 2\right)\left(\frac{i\sinh\alpha\theta - 1}{2}\right)}{\left(2\gamma_\theta + 1\right)}\right\} \tag{43}$$

Persamaan (42) dan (43) merupakan fungsi gelombang untuk n_θ *=0* dan n_θ *=1* dari dari persamaan Klein Gordon kombinasi potensial hiperbolik bagian Angular *(θ).*

Solusi Persamaan Klein Gordon Bagian Radial (r)

Dengan mengaplikasikan $R(r) = \frac{Q(r)}{\sqrt{r}}$, $\coth\alpha r = 1 - 2u_r$, dan $\frac{1}{r^2} = \frac{1}{\sinh^2\alpha r}$ dalam Persamaan (23), maka menjadi

$$u_r\left(1-u_r\right)\frac{d^2Q(r)}{du_r^{\,2}} + \left(1-2u_r\right)\frac{dQ(r)}{du_r} + \left[\eta_\lambda - \frac{-\kappa_V + \xi_{\lambda E}}{4u_r} - \frac{\kappa_V + \xi_{\lambda E}}{4\left(1-u_r\right)}\right]Q(r) = 0 \tag{44}$$

Dengan

$$\eta_{\lambda}=\left(\frac{1}{4}+\lambda_2\right)\frac{1}{\alpha^2};\kappa_V=\left(E-M_o\right)\frac{V_H}{2\alpha^2};\xi_{\lambda E}=\frac{\left(E^2-M_o^{\ 2}\right)+\left(E-M_o\right)\frac{V_H}{2}+\lambda_1}{\alpha^2} \tag{45}$$

Kemudian, dengan menggunakan fungsi gelombang baru $Q(r)=u_r^{\ \gamma_r}\left(1-u_r\right)^{\chi_r} f\left(u_r\right)$, Persamaan (44) menjadi,

$$f^{"}\left(u_r\right)+\left[\frac{\left(2\gamma_r+1\right)-\left(2\gamma_r+2\chi_r+2\right)u}{u_r\left(1-u_r\right)}\right]f^{'}\left(u_r\right)+\left[\frac{\eta_{\lambda}-\left(\gamma_r+\chi_r\right)\left(\gamma_r+\chi_r+1\right)}{u_r\left(1-u_r\right)}\right]f\left(u_r\right)=0 \tag{46}$$

Dimana

$$\gamma_r=\pm\sqrt{\frac{\left(E^2-M_o^{\ 2}\right)+\lambda_1}{4\alpha^2}} \quad \text{dan} \quad \gamma_r=\pm\sqrt{\frac{\left(E-M_o\right)V_H+\left(E^2-M_o^{\ 2}\right)+\lambda_1}{4\alpha^2}} \tag{47}$$

Dengan membandingkan persamaan (5) dan (44) maka dihasilkan,

$$\lambda_0=\frac{-\left(2\gamma_r+1\right)}{u_r}+\frac{\left(2\chi_r+1\right)}{1-u_r} \tag{48}$$

$$s_o=\frac{\eta_{\lambda}-\left(\gamma_r+\chi_r\right)\left(\gamma_r+\chi_r+1\right)}{u_r}+\frac{\eta_{\lambda}-\left(\gamma_r+\chi_r\right)\left(\gamma_r+\chi_r+1\right)}{\left(1-u_r\right)} \tag{49}$$

Dengan menggunakan Persamaan (6), (16), dan (46), maka diperoleh eigenvalue,

$$\eta_{\lambda}=\left(\gamma_r+\chi_r+n\right)\left(\gamma_r+\chi_r+\left(n+1\right)\right) \tag{50}$$

Dari Persamaan (50) dapat diperoleh energi relativistik persamaan Klein Gordon dalam kombinasi potensial hiperbolik, yaitu

$$\left(E^2-M_o^{\ 2}\right)=\alpha^2\left[\left(\sqrt{\left(\left(\frac{1}{4}+\lambda_2\right)\frac{1}{\alpha^2}\right)+\tfrac{1}{4}}-\left(n_r+\tfrac{1}{2}\right)\right)^2-\frac{\left(\left(E-M_o\right)\frac{V_H}{2\alpha^2}\right)^2}{4\left(\sqrt{\left(\left(\frac{1}{4}+\lambda_2\right)\frac{1}{\alpha^2}\right)+\tfrac{1}{4}}-\left(n_r+\tfrac{1}{2}\right)\right)^2}\right]-\left(E-M_o\right)\frac{V_H}{2}-\lambda_1 \tag{51}$$

n_r adalah bilangan kuantum angular. Persamaan (51) merupakan energi relativistik dari persamaan Klein Gordon dalam kombinasi potensial hiperbolik. Energi relativistik ini diperoleh dari bagian radial (*r*). Persamaan (31) dan (41) yang merupakan konstanta disubstitusikan pada Persamaan (51). Untuk menghitung energi relativistik dapat menggunakan software Matlab. Namun, dalam penelitian ini hanya disajikan sampai persamaan energi relativistik saja. Nilai energi relativistik yang dihasilkan dalam persamaan Klein-Gordon dapat bernilai positif dan negatif. Energi bernilai positif terjadi ketika persamaan Klein-Gordon digunakan untuk menjelaskan partikel bebas yaitu partikel yang berdiri sendiri. Energi total partikel sepenuhnya dinyatakan oleh energi kinetiknya sehingga energinya kosntan, oleh karena itu dapat dipilih partikel dengan keadaan energi positif dan dapat mengabaikan keadaan energi negatif. Sementara, energi bernilai negatif ketika persamaan Klein-Gordon diberlakukan pada partikel tunggal yang memiliki interaksi dengan partikel lain. Ketika partikel saling berinteraksi maka terjadi pertukaran energi dengan lingkungan, dimana ada sejumlah energi yang diemisikan dalam proses. Kemudian, energi dari sebuah partikel akan menuju ke keadaan energi negatif tak terhingga, sehingga keadaan energi negatif tidak dapat diabaikan (Ikhdair dan Hamzavi, 2012).

Untuk fungsi gelombang bagian angular dihasilkan dari Persamaan (16), (17), (18), dan (19) serta $\coth\alpha r=1-2u_r$ dan baru $Q(r)=u_r^{\ \gamma_r}\left(1-u_r\right)^{\chi_r} f\left(u_r\right)$, sehingga diperoleh fungsi gelombang, maka

$$Q_0\left(u_r\right)=C'\left(\frac{1-\coth\alpha r}{2}\right)^{\gamma_r}\left(\frac{1+\coth\alpha r}{2}\right)^{\chi_r} \tag{52}$$

$$Q_1\left(u_r\right)=C'\left(\frac{1-\coth\alpha r}{2}\right)^{\gamma_r}\left(\frac{1+\coth\alpha r}{2}\right)^{\chi_r}\times$$
$$\left(2\gamma_r+1\right)\left\{1+\frac{\left(-1\right)\left(2\gamma_r+2\chi_r+2\right)\left(\frac{\coth\alpha r-1}{2}\right)}{\left(2\gamma_r+1\right)}\right\} \tag{53}$$

Persamaan (52) dan (53) merupakan fungsi gelombang untuk n_r *=0* dan n_r *=1* dari persamaan Klein Gordon kombinasi potensial hiperbolik bagian radial (*r*). Penelitian ini berhasil menyelesaikan persamaan Klein-Gordon untuk partikel spin nol dalam kombinasi potensial hiperbolik menggunakan metode pemisahan variabel dan AIM. Solusi yang diperoleh meliputi fungsi gelombang untuk bagian axial, angular, dan radial, serta energi relativistik partikel. Metode AIM terbukti efektif dalam menemukan solusi eksak untuk persamaan diferensial orde dua, khususnya dalam konteks fisika teoritis.

KESIMPULAN

Penyelesaian energi relativistik dan fungsi gelombang dari persamaan Klein Gordon yang dipengaruhi oleh kombinasi potensial hiperbolik yaitu potensial hulten serta potensial scraff hiperbolik tipe I dan II menggunakan metode iterasi asimtotik. Persamaan Klein Gordon dalam kondisi anti parrtikel yaitu potensial skalar sama dengan negatif potensial vektor $\left(S\left(x\right)=-V\left(x\right)\right)$. Persamaan Klein Gordon dikaji dalam sistem koordinat silinder tak terpusat. Energi relativistik dan fungsi gelombang disajikan dalam bentuk persamaan. Energi relativistik dihasilkan dari bagian radial dan fungsi gelombang disajikan dalam bentuk persamaan hipergoemetri.

DAFTAR PUSTAKA

Biswas, B., & Debnath, S. (2013). Analytical solutions of the klein-gordon equation with position-dependent mass for generalized hulthen potential via asymptotic iteration method. *African Review of Physics*, *8*, 195–200.

Cari, C., Dianawati, D. A., & Suparmi, A. (2019). Spatially q-deformed radial momentum of d-dimensional Klein-Gordon equation for Harmonic Oscillator plus Inverse Quadratic potential investigated using hypergeometric method. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, *578*(1), 012092. https://doi.org/10.1088/1757-899X/578/1/012092

Cari, C., Suparmi, A., & Elviyanti, I. L. (2017). Approximate solution for the minimal length case of Klein Gordon equation for trigonometric cotangent potential using Asymptotic Iteration Method. *Journal of Physics: Conference Series*, *909*, 012002. https://doi.org/10.1088/1742-6596/909/1/012002

Ciftci, H., Hall, R. L., & Saad, N. (2003). Asymptotic iteration method for eigenvalue problems. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, *36*(47), 11807–11816. https://doi.org/10.1088/0305-4470/36/47/008

Elviyanti, I. L., Pratiwi, B. N., Suparmi, A., & Cari, C. (2018). The Application of Minimal Length in Klein-Gordon Equation with Hulthen Potential Using Asymptotic Iteration Method. *Advances in Mathematical Physics*, *2018*, 1–8. https://doi.org/10.1155/2018/9658679

Elviyanti, I. L., & Syukron, A. A. (2020). The minimal length case of the Klein Gordon equation with hyperbolic cotangent potential using Nikivorof-Uvarof Method. *Journal of Physics: Theories and Applications*, *4*(1), 1. https://doi.org/10.20961/jphystheor-appl.v4i1.40669

Falaye, B. J. (2012). The Klein-Gordon equation with ring-shaped potentials: Asymptotic iteration method. *Journal of Mathematical Physics*, *53*(8). https://doi.org/10.1063/1.4746697

Ikhdair, S. M. (2011). Bound States of the Klein-Gordon for Exponential-Type Potentials in D-Dimensions. *Journal of Quantum Information Science*, *01*(02), 73–86. https://doi.org/10.4236/jqis.2011.12011

Ikot, A. N., Akpabio, L. E., & Uwah, E. J. (2011). Bound State Solutions of the Klein Gordon Equation with the Hulth´en Potential. *Electronic Journal of Theoretical Physics*, *8*(25), 225–232.

Momtazi, E., Rajabi, A. A., Yazarloo, B. H., & Hassanabadi, H. (2014). Analytical solution of the Klein--Gordon equation under the Coulomb-like scalar plus vector potential with the Laplace transforms approach. *Turkish Journal of Physics*, *38*, 81–85. https://doi.org/10.3906/fiz-1305-7

Negro, J., Nieto, L. M., & Rosas-Ortiz, O. (2004). Regularized Scarf potentials: energy band structure and supersymmetry. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, *37*(43), 10079–10093. https://doi.org/10.1088/0305-4470/37/43/005

Nugraha, D. A., Suparmi, A., Cari, C., & Pratiwi, B. N. (2017). Asymptotic iteration method for analytical solution of Klein-Gordon equation for trigonometric Pöschl-Teller potential in D-dimensions. *Journal of Physics: Conference Series*, *795*, 012025. https://doi.org/10.1088/1742-6596/795/1/012025

Poszwa, A. (2014). Relativistic Generalizations of the Quantum Harmonic Oscillator. *Acta Physica Polonica A*, *126*(6), 1226–1234. https://doi.org/10.12693/APhysPolA.126.1226

Pratiwi, B. N., Suparmi, A., Cari, C., & Anwar, F. (2016). Asymptotic iteration method for the eigenfunctions and eigenvalue analysis in Schrodinger equation with modified anisotropic nonquadratic potential. *Journal of Physics: Conference Series*, *776*, 012090. https://doi.org/10.1088/1742-6596/776/1/012090

Roy, A. K. (2005). The generalized pseudospectral approach to the bound states of the Hulthén and the Yukawa potentials. *Pramana*, *65*(1), 1–15. https://doi.org/10.1007/BF02704371

Suparmi. (2011). *Mekanika Kuantum I*. Jurusan Fisika MIPA Universitas Sebelas Maret.

Suparmi, A. (2013). Energy Spectra and Wave Function Analysis of q-Deformed Modified Poschl-Teller and Hyperbolic Scarf II Potentials Using NU Method and a Mapping Method. *Advances in Physics Theories and Applications*, *16*. https://doi.org/10.7176/APTA-16-8

Suparmi, A., Cari, C., & Elviyanti, I. L. (2018). Analysis of Eigenvalue and Eigenfunction of Klein Gordon Equation Using Asymptotic Iteration Method for Separable Non-central Cylindrical Potential. *Journal of Physics: Conference Series*, *1011*, 012086. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1011/1/012086

Suparmi, S., Dianawati, D. A., & Cari, C. (2019). Solution of Q-Deformed D-Dimensional Klein-Gordon Equation Kratzer Potential using Hypergeometric Method. *Jurnal Penelitian Fisika Dan Aplikasinya (JPFA)*, *9*(2), 163. https://doi.org/10.26740/jpfa.v9n2.p163-177

Varshni, Y. P. (1990). Eigenenergies and oscillator strengths for the Hulthén potential. *Physical Review A*, *41*(9), 4682–4689. https://doi.org/10.1103/PhysRevA.41.4682